Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin

Année universitaire 2014-2015

Exercices de théorie des groupes

Licence 3 - Mathématiques

(par Ahmed LAGHRIBI)

GROUPES ET SOUS-GROUPES

1) Soit ~ la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x^2 \equiv y^2 \pmod 6.$$

On désigne par $[x] = \{ y \in \mathbb{Z} \mid x \sim y \}$ et par $\mathbb{Z}/\!\sim\; = \{ [x] \mid x \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que l'opération $[x].[y] = [xy]$ est bien définie. L'opération $[x] + [y] = [x+y]$ est-elle bien définie ?

2) Soient G un groupe et $a, b \in G$ tels que $ab \neq ba$. Soit e l'élément neutre de G.

a) Montrer que les éléments e, a, b, ab, ba sont distincts;

b) Montrer que si $a^2 \neq e$ alors $a^2 \notin \{e,a,b,ab,ba\}$.

c) Montrer que si $a^2 = e$ alors $aba \notin \{e,a,b,ab,ba\}$.

Déduire que tout groupe non abélien possède au moins 6 éléments.

3) Soit G un groupe. Montrer que :

a) G est abélien $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in G$, $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$.

b) Si $\forall a, b \in G$ $(ab)^2 = a^2 b^2$, alors G est abélien.

c) Si $\forall a \in G$ $a^2 = 1$, alors G est abélien.

d) Si $\forall a \in G$ $a = a^{-1}$, alors G est abélien.

4) Soit G un groupe d'ordre 2n. On note e l'élément neutre de G. Montrer que :

$$\exists a \in G,\ a \neq e, \text{ tel que } a = a^{-1} \quad .$$

5) Soient G un groupe, $x \in G$ et e l'élément neutre de G. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $x^n = e$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $x^m = x^{-1}$.

6) Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

7) Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Montrer que G est un groupe cyclique pour le produit matriciel.

b) Donner les générateurs de G.

8) Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Montrer que G est un groupe abélien pour le produit matriciel.

b) Montrer que G contient des sous-groupes cycliques de tout ordre fini.

c) G contient-il un sous-groupe cyclique d'ordre infini?

9) Considérons $\mathbb{Q}$ muni de l'addition..

a) Montrer que si $r_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$ et $r_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$, alors $<r_1,r_2> \subset <\frac{1}{q_1 q_2}>$ (rappelons que $<r_1,r_2>$ est le sous-groupe de $\mathbb{Q}$ engendré par r_1 et r_2).

b) Plus généralement, montrer que si $r_1,.., r_n \in \mathbb{Q}$, alors $<r_1,..,r_n>$ est cyclique.

c) Montrer que si $H_n = < 1/n! >$, alors $H_1 \subset H_2 \subset H_3$ ......

d) Montrer que $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\geq 1} H_n$ ($\mathbb{Q}$ est une réunion de groupes cycliques).

e) Finalement, $\mathbb{Q}$ est-il cyclique?

10) Soit A une partie non vide d'un groupe G. Montrer que <A>, le sous-groupe de G engendré par A, est égal à l'intersection $\bigcap_{\substack{H \text{ sous-groupe de } G \\ \text{contenant } A}} H$.

11) Montrer qu'un groupe ne peut être réunion de deux sous-groupes propres.

12) Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. Montrer que si on a
$\forall\, a, b \in G \quad aH = bH \Rightarrow Ha = Hb$, alors : $\forall a \in G \quad aHa^{-1} = H$

13) Soit G un groupe d'élément neutre e. On suppose que $G \neq \{e\}$. Montrer que si $\{e\}$ et G sont les seuls sous-groupes de G, alors G est cyclique d'ordre premier.

14) Soit G un groupe abélien et $H = \{ a \in G \mid \exists\, n(a) \in \mathbb{N}_0 \text{ tel que } a^{n(a)} = 1\}$.
Montrer que H est un sous-groupe de G.

15) Montrer que si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes d'un groupe G abélien, alors $H_1.H_2 = \{ x.y \mid x \in H_1 \text{ et } y \in H_2 \}$ est un sous-groupe de G. Montrer que ce résultat est faux pour G non abélien.

16) Soit H_1 et H_2 deux sous-groupes d'un groupe G. Montrer que :

$$H_1.H_2 \text{ est un sous-groupe de } G \iff H_1.H_2 = H_2.H_1$$

17) Soit H et K deux sous-groupes d’un groupe fini. Montrer que

$$\#H.K = \frac{\#H.\#K}{\#H \cap K}$$

18) Soit H et K deux sous-groupes d’un groupe G. Supposons que $H \subset K \subset G$ et $(G:H) < \infty$ .Montrer que

a) $(G:K) < \infty$ et $(K:H) < \infty$.

b) $(G:H) = (G:K).(K:H)$.

19) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, on définit une application $T_{a,b}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$T_{a,b}(x) = ax + b.$$

a) Montrer que $\boldsymbol{T} = \{ T_{a,b} \mid a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, b \in \mathbb{R} \}$ muni de la composition des applications est un groupe non abélien.

b) Trouver tous les éléments $t \in \boldsymbol{T}$ tels que $t \circ T_{a,b} = T_{a,b} \circ t \quad \forall\, T_{a,b} \in \boldsymbol{T}$.

20) Soit H un sous-groupe d'un groupe G et $N = \bigcap_{x \in G} x H x^{-1}$. Montrer que N est un sous-groupe de G vérifiant $y N y^{-1} = N \;, \; \forall\, y \in G$.

21) Soit $G = \langle g \rangle$ un groupe cyclique d'ordre n (i.e. n est le plus petit entier naturel non nul vérifiant $g^n = e$). Déterminer tous les sous-groupes de G. Montrer que $G = \langle g^r \rangle$ si et seulement si pgcd(r,n) = 1.

22) Montrer que si p est un nombre premier alors :

$$a^p \equiv a \quad (\text{mod } p) \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

Déterminer le reste de la division de 7^{100} par 11

23) On pose $\mathbb{Z}n^* = \{ [a] \in \mathbb{Z}n \mid \text{pgcd}(a,n) = 1 \}$.

a) Montrer que $(\mathbb{Z}n^*, .)$ forme un groupe, où $[a] . [b]=[ab]$ pour tous a, b dans $\mathbb{Z}$.

b) Si on note $\phi(n)$ l'ordre de $\mathbb{Z}n^*$, montrer que pour tout entier a tel que (a,n) = 1, on a

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \quad (\text{mod } n)$$

En particulier, en déduire que si p est un nombre premier ne divisant pas a alors

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod } p) \quad \text{(petit Théorème de Fermat)}$$

c) Montrer que si p est un nombre premier alors

$$(p - 1)! \equiv -1 \ (\text{mod } p) \quad \text{(Théorème de Wilson)}$$

(Aide : montrer que si $x \in \mathbb{Z}p$ et $x^2 = 1$ alors $x = 1$ ou $x = p - 1$.)

HOMOMORPHISME ET SOUS-GROUPE NORMAL

24) Montrer que si N est un sous-groupe d'un groupe G alors :

$$N \lhd G \iff \forall x \in G, \forall n \in N \quad xN = nxN.$$

25) Montrer que $M \lhd G$ et $N \lhd G \Rightarrow M \cap N \lhd G$.

26) Soit G un groupe et $g \in G$ un élément d'ordre 2. Montrer que :

$$\{1,g\} \lhd G \iff g \in Z(G).$$

27) Soit M et N deux sous-groupes normaux de G. Montrer que $M.N = \{ m.n \mid m \in M \text{ et } n \in N \}$ est un sous-groupe normal de G.

28) Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes. Soient encore $M \lhd G_1$ et $N \lhd G_2$. Montrer que $f^{-1}(N) \lhd G_1$. Montrer que si de plus f est surjective alors $f(M) \lhd G_2$

29) Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Montrer que si $(G:H) = 2$ alors $H \lhd G$.

30) Soit G un groupe possédant au moins un sous-groupe d'ordre s. Montrer que l'intersection de tous les sous-groupes d'ordre s est un sous-groupe normal de G.

31) Montrer que si un groupe est abélien alors tous ses sous-groupes sont normaux. A-t-on la réciproque ?

32) Soit H un sous-groupe d'un groupe G et $N(H) = \{ a \in G \mid aHa^{-1} = H\}$.
a) Montrer que $N(H) < G$ et que $H < N(H)$.
b) Montrer que $H \triangleleft N(H)$.
c) Montrer que si K est un sous-groupe de G tel que $H \triangleleft K$ alors $K \subset N(H)$
(c'est- à- dire dire N(H) est le plus grand sous-groupe de G contenant H dans lequel H est normal.)

33) Soit $A = \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}_0 \}$ et $B = \{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}_0 \}$ avec

$\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
a) Montrer que $G = A \cup B$ est un groupe pour le produit matriciel.
b) Montrer que A est un sous-groupe de G et que A, B sont les deux classes latérales à droite de A dans G. En déduire que A est un sous-groupe normal de G.
c) Montrer que $C = \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}_0 \}$ est un sous-groupe de A.
En déduire qu'en général $M \triangleleft H \triangleleft G$ n'entraîne pas $M \triangleleft G$.

34) Soit $GL_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_{2x2}(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0 \}$. Soit H le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les deux matrices

$$I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si on pose K = IJ et 1 la matrice identité, montrer que
$$H = \{ 1, I, J, K, -1, -I, -J, -K \}.$$
b) Calculer le centre de H.
c) Montrer que tous les sous-groupes de H sont normaux.

35) Soit D_{2n} le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les deux matrices

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{où } a = \exp(2i\pi/n)$$

a) Montrer que D_{2n} est d'ordre 2n.
b) Montrer que D_{2n} contient un sous-groupe normal cyclique d'indice deux.

36) Soit G un groupe et W = G x G, où le produit est défini par :
$$(a_1 ,b_1).(a_2 ,b_2) = (a_1 a_2 , b_1 b_2)$$
Montrer que :
a) l'application $\mu : G \to W$ définie par $\mu(a) = (a,a)$ est un morphisme injectif.
b) $\mu(G) \triangleleft W \quad \Leftrightarrow \quad$ G abélien.

37) Soient $h_1 : G_1 \to H$ et $h_2 : G_2 \to H$ des morphismes de groupes. Posons encore $K = \{ (x_1,x_2) \in G_1 x\, G_2 \mid h_1(x_1) = h_2(x_2) \}$.
a) Prouver que K est un sous-groupe de $G_1 x\, G_2$.
b) Prouver que l'application $h : K \to H : (x_1,x_2) \to h_1(x_1)$ est un morphisme de groupes.
c) Prouver que $\ker h = \ker h_1 \times \ker h_2$.

38) Soit G = $\left\{ \begin{pmatrix} 1-n & -n \\ n & 1+n \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{Z}) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$. Montrer que G est un groupe cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}$.

39) Soit $\mathbb{Z}n^* = \{ [a] \in \mathbb{Z}n \mid (a,n) = 1 \}$.
a) Montrer que $\mathbb{Z}n^*$ est un groupe pour la multiplication de $\mathbb{Z}n$.
b) Montrer que $[a] \in \mathbb{Z}n^*$ si et seulement si [a] engendre le groupe $(\mathbb{Z}n,+)$.
c) En déduire que $Aut(\mathbb{Z}n) \cong \mathbb{Z}n^*$.
(Aide : l'isomorphisme est donné par l'application $\mathbb{Z}n^* \to Aut(\mathbb{Z}n)$
$[s] \to ([x] \to [s.x])$.)

40) Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Posons encore
$S = \{ Ha \mid a \in G \}$. Pour $b \in G$ on définit $T_b : S \to S$ par $T_b(Ha) = Hab^{-1}$.
a) Vérifier que $T_b \in Perm(S)$, $\forall\, b \in G$. (Perm(S) désignant le groupe des permutations de S)
b) Vérifier que l'application $j : G \to Perm(S) : a \to T_a$ est un morphisme de groupes.
c) Décrire kerj.
d) Montrer que kerj est le plus grand sous-groupe normal de G contenu dans H.

41) Déduire du 40) que si G est un groupe non abélien d'ordre 6 alors $G \cong S_3$.

42) Soit G un groupe fini d'ordre n, H un sous-groupe de G tel que n ne divise pas (G:H)!. Montrer que G contient un sous-groupe normal $\neq \{1\}$ et contenu dans H.

43) Soit G un groupe d'ordre 36 et H un sous-groupe de G d'ordre 9. Montrer que $H \lhd G$ ou qu'il existe $N \lhd G$, $N \subset H$ et $\#N = 3$.

44) Fixons α réel et A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$
a) Montrer que $A^3 = 0$.
b) Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit la matrice $A_x = I + x.A + \frac{1}{2} x^2 A^2$, où I est la matrice identité. Montrer que $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{R}$.

45) Soit G un groupe, H et N deux sous-groupes de G avec N normal dans G. Soit μ_x l'automorphisme interne induit par $x \in G$.

a) Montrer que l'application $x \to \mu_x$ induit un morphisme $f : H \to Aut(N)$.
b) Si $H \cap N = \{1\}$, montrer que l'application $HxN \to H.N : (x,y) \to x.y$ est une bijection et un isomorphisme si et seulement si f est trivial.

<u>GROUPE QUOTIENT</u>

46) Soit N un sous-groupe du groupe cyclique G. Montrer que $\frac{G}{N}$ est cyclique.

47) Montrer que si $\frac{G}{Z(G)}$ est cyclique, alors G est abélien.

48) Soit G_1 , G_2 deux groupes. Soit encore $N = \{ (a,1) \mid a \in G_1 \}$.

a) Montrer que $N \lhd G_1 \text{ x } G_2$.

b) Montrer que $\frac{(G_1\text{x}G_2)}{N} \cong G_2$.

49) Soit $H \lhd G$ et $x \in G$ d'ordre fini. Montrer que l'ordre de xH (dans $\frac{G}{H}$) divise l'ordre de x (dans G).

50) Soit $K \lhd G$, G un groupe fini. Montrer que si un sous-groupe H vérifie $(|H|, (G:K)) = 1$, alors $H \subset K$.

(aide : Utiliser l'isomorphisme : $\frac{H}{H \cap K} \cong \frac{H.K}{K}$*.)*

51) Soit G un groupe . Soit encore $G' = < \{ a\, b\, a^{-1} b^{-1} \mid a,b \in G \} >$.

a) Montrer que $G' \lhd G$.

b) $\frac{G}{G'}$ est abélien.

52) Soit G un groupe abélien d'ordre $p^n.m$, où p est premier et p ne divise pas m.

Soit $P = \{ a \in G \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tel que } a^{p^k} = 1 \}$.

Montrer que :

a) P est un sous-groupe de G.

b) $\frac{G}{P}$ n'a aucun élément d'ordre p.

c) $|P| = p^n$.

53) Soit G un groupe abélien d'ordre $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} .....p_n^{a_n}$, où p_1 ,.....p_n sont des nombres premiers distincts deux à deux et $a_1,....,a_n \in \mathbb{N}_0$.

a) Montrer que G contient des sous-groupes S_1 ,....,S_n respectivement d'ordre $p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, ...p_n^{a_n}$.

b) Montrer que $G \cong S_1 \text{ x } S_2 \text{ x.....x } S_n$.

c) Monter que tout groupe abélien d'ordre p^n $(n \geq 1)$ possède un sous-groupe d'ordre p^{n-1}. *(aide: induction sur n)*

d) Soit d un diviseur de m. Montrer qu'il existe un sous-groupe d'ordre d.

54) Soit G un groupe abélien d'ordre $p_1\, p_2 \dots p_n$, où $p_1,....,p_n$ sont des nombres premiers distincts deux à deux. Montrer que G est cyclique.

55) Montrer que tout élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est d'ordre fini. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ possède un et un seul sous-groupe d'ordre n et que ce sous-groupe est cyclique.

56) Soient m, n des entiers avec m | n. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \,/\, m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

57) Soient G, G' deux groupes et $\phi : G \to G'$ un morphisme. Montrer que si $H \triangleleft G$ tel que $\phi(H) = \{1\}$, alors ϕ induit un morphisme de $\frac{G}{H} \to G'$.

58) Soit $G = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ et $H = \{ e^{i\pi\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{Q} \}$.
a) Montrer que H est le sous-groupe de G des éléments d'ordre fini.
b) Montrer que $G/H \cong \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.
(aide : considérer l'application $G \to \mathbb{R}/\mathbb{Q} : e^{i\beta} \to \frac{\beta}{\pi} + \mathbb{Q}$.*)*

59) Un groupe G est dit métacyclique si G possède un sous-groupe normal N tel que N et $\frac{G}{N}$ sont cycliques.
a) Montrer que tout groupe cyclique est métacyclique.
b) Montrer que tout sous-groupe d'un groupe métacyclique est métacyclique.
c) Montrer que tout quotient d'un groupe métacyclique est métacyclique.
d) Les groupes suivants sont-ils métacycliques : $\mathbb{Z}_2$; $\mathbb{Z}_2 x \mathbb{Z}_2$; $\mathbb{Z}_2$ x $\mathbb{Z}_2$ x $\mathbb{Z}_2$?

60) Soit H un sous-groupe normal d'un groupe fini G tel que $(|H|,(G:H)) = 1$.
Montrer que H est le seul sous-groupe d'ordre $|H|$.

61) Soit G un groupe, Z(G) le centre de G, N un sous-groupe normal de G, $A = \{ aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \}$ l'ensemble des commutateurs de G et G' = <A> le sous-groupe de G engendré par les commutateurs.
a) Montrer que $\frac{G}{N}$ est abélien si et seulement si $G' \subset N$.
b) Montrer que si $\frac{G}{Z(G)}$ est fini, alors A est un ensemble fini. Estimer le nombre d'éléments de A.
c) Calculer G' dans le cas où le nombre d'éléments du groupe $\frac{G}{Z(G)}$ est un nombre premier.

62) Soit G un groupe. Pour tout x dans G, on définit l'application μ_x de G dans G par : $\mu_x(y) = xyx^{-1}$.
a) Montrer que μ_x est un automorphisme de G.
b) Soit Aut(G) le groupe des automorphismes de G. Montrer que l'application μ de G dans Aut(G) définie par $\mu(x) = \mu_x$ est un homomorphisme de groupes.
c) Calculer $\mathrm{Ker}\mu$.
d) Montrer que $\mathrm{Im}\mu$ est un sous-groupe normal de Aut(G).
e) Montrer que si Aut(G) est cyclique alors G est abélien.
f) Montrer que si G est cyclique, alors Aut(G) est abélien.
g) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

63) On suppose fixé un entier $n > 1$ et on pose $E_n = \{1,2,3....n,-1,-2,....-n\}$, B_n = l'ensemble de toutes les permutations p de E_n telles que $p(-i) = -p(i)$ pour tout $i \in E_n$.
a) Montrer que B_n est un sous-groupe de $\mathrm{Perm}(E_n)$.
b) Prouver que pour tout $p \in B_n$, la fonction p définie par :

$$\overline{p}(i) = |p(i)| \qquad \forall\ i = 1, 2,....,n$$

est une permutation de l'ensemble {1,2,...n}
c) Prouver que pour tout $p \in B_n$ et tout $i \in E_n$ on a $|p(i)| = |p(|i|)|$.En déduire que l'application $p \to \overline{p}$ définit un morphisme surjectif de B_n dans S_n.

d) Prouver que le noyau du morphisme précédent est d'ordre 2. En déduire l'ordre de B_n.

64) Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G. On suppose (G :K) fini.

a) Montrer que $(H : H\cap K) \leq (G : K)$ et que l'égalité a lieu si G = HK.
(Aide : si on note G/K l'ensemble des classes latérales à gauche de K dans G et de même pour $H/H\cap K$, utiliser *l'application $H/H\cap K \to G/K$: $xH\cap K \to xK$.)*

b) On suppose de plus (G : H) fini. Montrer
   i) $(G : H\cap K) \leq (G : H)\,(G : K)$ et que l'égalité a lieu si G = HK.
   ii) si de plus (G : H) et (G : K) sont premier entre eux,
   $(G : K) = (H : H\cap K)$ et $(G : H) = (K : H\cap K)$.

c) On suppose K normal dans G et H fini. Montrer que si (G : K) et | H | sont premiers entre eux alors $H \subset K$.

Théorèmes de Sylow

65) Soit G un groupe fini et P un p-sous-groupe de Sylow. Montrer que P est le seul p-sous-groupe de Sylow de G si et seulement si P est normal dans G.

66) Soit G un p-groupe, $G \neq \{1\}$. Montrer qu'il existe une suite de sous-groupes

$$\{1\}=G_0 \subset G_1 \subset G_2 \,.......\subset G_n = G$$

telle que $G_i \lhd G_{i+1}$ et $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ d'ordre p.

67) Soit G un groupe d'ordre p^n.

a) Montrer que tout sous-groupe d'ordre p^i ($i \in \{ 0, 1,..., n-1 \}$) est contenu dans un groupe d'ordre p^{i+1}.

b) En déduire que si G ne possède qu'un seul sous-groupe d'ordre p^{n-1}, alors il est cyclique.

68) Montrer que tout groupe d'ordre 12 est résoluble.

69) Soient p, q deux nombres premiers ($p \neq q$) impairs, Montrer que tout groupe d'ordre pq^2 est résolubles.

70) Soit p, q deux nombres premiers impairs et G un groupe d'ordre 2pq. Montrer que G est résoluble.

71) Soit G un groupe simple d'ordre 168.

a) Déterminer le nombre de sous-groupes de G d'ordre 7.

b) Déterminer le nombre d'éléments de G d'ordre 7.

72) Soit G un groupe et H un sous-groupe .

a) Montrer que $N(xHx^{-1}) = xN(H)x^{-1} \quad \forall x \in G$.

b) Montrer que si G est fini et H un p-sous-groupe de Sylow alors $N(N(H)) = N(H)$.

73) Montrer que tout groupe d'ordre p^2 est abélien et que $\mathbb{Z}/ p^2\mathbb{Z}$ et

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont les seuls groupes d'ordre p^2 (à un isomorphisme près).

74) Soit G un groupe d'ordre p^3, p premier et G non abélien.

a) Montrer que $Z(G) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\dfrac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

b) Montrer que tout sous-groupe de G d'ordre p^2 contient Z(G) et est normal.

c) Supposons que $x^p = 1$, $\forall x \in G$. Montrer que G contient un sous-groupe normal isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

75) Soit G un groupe fini et H un sous-groupe normal d'ordre p, p premier.

a) Montrer que H est contenu dans tout p-sous-groupe de Sylow de G.

b) Montrer que si G est un p-groupe alors H est contenu dans le centre de G.

c) Montrer que si P et P' sont deux p-sous-groupes de Sylow de G tels que N(P) = N(P') alors P = P'.

76) Soit G un groupe fini et H un p-sous-groupe de Sylow d'ordre p^m.

a) Montrer que H est le seul sous-groupe de G d'ordre p^m contenu dans N(H).

b) Montrer que si $a \in N(H)$ est d'ordre p^k alors $a \in H$.

<u>Le groupe symétrique</u>

77) Soit p premier et σ une permutation de S_p d'ordre p. Montrer que σ est un p-cycle.

78) Soit A_4 le groupe des permutations paires du groupe symétrique S_4.

a) Montrer que si $s \in S_4$ est un élément d'ordre 3 alors s est un 3-cycle.

b) Soit H un sous-groupe normal de S_4, montrer que si H contient un élément d'ordre 3 alors $A_4 \subset H$.

c) Montrer que si H est un sous-groupe de S_4 d'ordre 12 alors $H = A_4$.

d) Déterminer tous les sous-groupes d'ordre 3 de A_4.

c) Déterminer tous les sous-groupes d'ordre 4 de A_4.

79) Soient $n \geq 1$ et $k \in \{1, 2, 3,\dots, n\}$. Posons encore X l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3,\dots,n\}$ contenant k éléments. Le groupe symétrique S_n agit sur X par :

$$\sigma.\{i_1, i_2, \dots, i_k\} = \{\sigma(i_1), \sigma(i_2),\dots, \sigma(i_k)\}.$$

a) Montrer que cette action est transitive.

b) Déterminer $\mathrm{Stab}(\{1, 2,\dots,k\})$.

c) En déduire le cardinal de X.

80) Soit p un nombre premier et G un sous-groupe du groupe symétrique S_p. Supposons encore que G agit transitivement sur $\{1, 2, \dots,p\}$. Montrer que si N est un sous-groupe normal de G et $N \neq \{1\}$, alors N agit transitivement sur $\{1, 2, \dots,p\}$.

81) a) Montrer que le groupe symétrique S_n est engendré par les transpositions suivantes : (1 2) ; (2 3) ; (3 4) ; … ; (n-1 n).

(aide : remarquer que pour $i<j-1$ la transposition $(i\ j) = (i\ i+1)\ (i+1\ j)\ (i\ i+1)$.)

b)Soit H un sous-groupe de S_n contenant S_{n-1}.

i) Montrer que si la transposition (i n) appartient à H (pour i<n) alors H = S_n (*utiliser a)).*

ii) Montrer que si σ est cycle dans H tel que $\sigma(n) \neq n$ alors H = S_n.

iii) Montrer que si $S_{n-1} \neq H$ alors H = S_n (c-à-d S_{n-1} est un sous-groupe maximal de S_n).

c) Soient p et q deux entiers tels que p + q = n.

i) Montrer que le stabilisateur de la partie P = {1, 2,.., p} (c-à-d l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$ telles que $\sigma(P) = P$) est isomorphe à S_p x S_q.

82) Soit p un nombre premier et GA(p) l'ensemble des applications σ de E = {0, 1 ,…, p-1} dans E définie par

$$\sigma(x) = a\,x + b \mod(p) \qquad \text{pour un certain } a \in E^* = E\backslash\{0\} \text{ et un certain } b \in E.$$

a)Vérifier que GA(p) est un sous-groupe de S_p.

b) Posons τ et σ_a les permutations de GA(p) définies par $\tau(x) = x + 1 \mod(p)$ et $\sigma_a(x) = a\,x \mod(p)$. Montrer que le groupe GA(p) est engendré par $\tau, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{p-1}$.

c) En déduire que | GA(p)| = (p-1)p.

d) Pour $a \in E^*$, montrer que $\sigma_a \tau\, \sigma_a^{-1}$ est une puissance τ. En déduire que le sous-groupe engendré par τ est un sous-groupe normal de GA(p).

e) Montrer que GA(p) est un groupe résoluble.

f) Soit $\theta \in S_p$ telle que $\theta\, \tau\, \theta^{-1} \in$ GA(p), montrer $\theta\, \tau\, \theta^{-1}$ est une puissance de τ .

(*aide : Supposer que* $\theta\, \tau\, \theta^{1}(x) = a\,x + b$ *, pour* $a \in E\text{-}\{0,1\}$ *et* $b \in E$*, et calculer* $(\theta\, \tau\, \theta^{1})^{p-1}$ *pour obtenir une contradiction).*

g) En déduire que si $\theta \in S_p$ telle que $\theta\, \tau\, \theta^{-1} \in$ GA(p), alors $\theta \in$ GA(p).

(*Si* $\theta\, \tau\, \theta^{-1} = \tau^{i}$ *, alors* $\theta(x + 1) = \theta(x) + i$ *et donc* $\theta(x) = i\,x + \theta(0)$*)*

Nous allons maintenant montrer que tout sous-groupe G transitif résoluble de S_p est conjugué à un sous-groupe de GA(p). Soit $G_t = \{1\} \subset G_{t-1} \subset \ldots \subset G_0 = G$ une chaîne de sous-groupe telle que G_{i+1} soit un sous-groupe normal de G_i et l'indice $(G_i : G_{i+1})$ soit un nombre premier.

i) Puisque G_0 est transitif et G_1 est normal, en déduire que G_1 est transitif (On suppose que t>1). En déduire de même que G_{t-1} est transitif.

ii) Montrer que | G_{t-1}| = p. En déduire que G_{t-1} est engendré par un p-cycle $\gamma = (i_1\ i_2 \ldots i_p)$ où

$i_1, i_2, \ldots i_p$ sont les nombres 0,1,….,p-1 rangés dans un certain ordre.

Considérons la permutation $\alpha \in S_p$, définie par :

$$\alpha(0) = i_1 \ , \alpha(1) = i_2 ,\ldots\ldots\ldots, \alpha(p-1) = i_p.$$

iii) Vérifier que $\alpha^{-1}\gamma\, \alpha = \tau$.

Posons $G_i' = \alpha^{-1} G_i\, \alpha$ pour i = 0,1,….,t.

iv) Vérifier que la chaîne de sous-groupe $G_t' = \{1\} \subset G_{t-1}' \subset \ldots \subset G_0'$ satisfait les conditions : G_{i+1}' est un sous-groupe normal de G_i' et l'indice $(G_i' : G_{i+1})$ est un nombre premier.

v) Vérifier que $G_{t-1}' \subset GA(p)$. En utilisant le point g) et le fait que G_{t-1}' est normal dans G_{t-2}', montrer que $G_{t-2}' \subset GA(p)$. Montrer de même que $G_0' \subset GA(p)$.