Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Licence 1 Maths-Info

Année universitaire 2014-2015

Méthodologies et outils pour les mathématiques et pour l'informatique

1 Eléments de logique

Exercice 1.1 Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ?

(1) $(2 < 3)$ et (3 divise 12).

(2) $(2 < 3)$ et (2 divise 5).

(3) $(2 < 3)$ ou (2 divise 5).

(4) $(2 < 3)$ et non(2 divise 5).

(5) non$(2 < 3)$ ou (2 divise 5).

Exercice 1.2 Soient P et Q deux propositions. On dit que la proposition "P **ou exclusif** Q" est vraie si P ou Q est vraie mais pas simultanément P et Q. Donner la table de vérité du connecteur logique "**ou exclusif**".

Exercice 1.3 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$.

(1) $x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 4 \ \cdots \ x = 2.$
(2) $x \in \mathbb{R}, \quad x = \pi \ \cdots \ \sin(x) = 0.$
(3) $n \in \mathbb{N}, \quad n$ est impair $\cdots$ n^2 est impair.

Exercice 1.4 Dire si l'implication $(1 = 2) \Longrightarrow (2 = 3)$ est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Exercice 1.5 Soient P, Q et R trois propositions. Montrer les équivalences suivantes :

(1) $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non } Q \Longrightarrow \text{non } P)$.

(2) non $(P$ ou $Q) \Longleftrightarrow$ (non P) et (non Q).

(3) non $(P$ et $Q) \Longleftrightarrow$ (non P) ou (non Q).

(4) P ou $(Q$ et $R) \Longleftrightarrow (P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$.

(5) P et $(Q$ ou $R) \Longleftrightarrow (P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$.

(6) P et $(Q$ et $R) \Longleftrightarrow (P$ et $Q)$ et R.

(7) P ou $(Q$ ou $R) \Longleftrightarrow (P$ ou $Q)$ ou R.

Exercice 1.6 (1) Soient P et Q deux propositions. Donner la négation et la contraposée de la proposition : $P \implies Q$.
(2) Application : Donner la négation et la contraposée des assertions suivantes :
(a) Si tu échoues à tes examens, tu ne partiras pas en vacances.
(b) Si un entier naturel est pair, il est divisible par 4.

Exercice 1.7 Soient P, Q, R et S quatre propositions. Donner la négation des propositions suivantes :
(1) P et (Q et R).
(2) (P ou Q) $\implies R$.
(3) P ou (Q et R).
(4) (P et Q) $\implies (R \implies S)$.

Exercice 1.8 Soient P, Q, R trois propositions. Montrer que les propositions suivantes sont vraies :
(1) ($P \implies Q$ et $Q \implies R$) $\implies$ ($P \implies R$).
(2) ($P \iff Q$ et $Q \iff R$) $\implies$ ($P \iff R$).

Exercice 1.9 La proposition (P et Q) $\implies$ (non P ou Q) est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

Exercice 1.10 Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

(1) Le carré de tout réel est positif.
(2) Certains réels sont strictement supérieurs à leurs carrés.
(3) Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres.
(4) Il existe un entier naturel multiple de tous les autres.
(5) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
(6) Etant donné trois nombres réels, il y en a au moins deux de même signe.

Exercice 1.11 Soient E l'ensemble des étudiants, S l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x, $h_j(x)$ l'heure de réveil de x le jour j. Soit P la proposition : "Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h".

(1) Ecrire avec des symboles mathématiques la proposition P.
(2) Ecrire la négation de P avec des symboles mathématiques, puis en français.

Exercice 1.12 Soit (u_n) une suite de nombres réels. Ecrire la négation des assertions suivantes :

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n$ tel que $x \leqslant n$.

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists q \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < q < \varepsilon$.

(3) $\exists M$ tel que $\forall n$, $|u_n| \leqslant M$.

(4) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n| < \varepsilon$.

Exercice 1.13 Nier les assertions suivantes :

(1) Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.
(2) Tous les habitants de la rue du Havre qui sont nés au mois de février gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".
(3) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad |x - \frac{1}{2}| < \alpha \implies |2x - 1| < \varepsilon$.

2 Ensembles

Exercice 2.1 Les notations $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ désignent-elles le même ensemble ?

Exercice 2.2 *Pour E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.*

Donner les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.

Exercice 2.3 Soient A, B, C trois ensembles. Démontrer les relations suivantes :
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 2.4 (1) Soient A, B des parties d'un ensemble E. Montrer qu'on a

$$C_E^{A\cup B} = C_E^A \cap C_E^B \quad \text{et} \quad C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B.$$

(2) *Généralisation :* Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée sur un ensemble I. Montrer qu'on a

$$C_E^{\cap_{i\in I} A_i} = \cup_{i\in I} C_E^{A_i} \quad \text{et} \quad C_E^{\cup_{i\in I} A_i} = \cap_{i\in I} C_E^{A_i}.$$

Exercice 2.5 Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Démontrer qu'on a :
(1) $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$.
(2) $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 2.6 Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. Montrer les assertions suivantes :

(1) $A \subset B \Longleftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$.

(2) $(A \cup C \subset A \cup B$ et $A \cap C \subset A \cap B) \Longrightarrow C \subset B$.

(3) $(A \cup C = A \cup B$ et $A \cap C = A \cap B) \Longrightarrow C = B$.

Exercice 2.7 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes ainsi que leurs négations : $A \subset B$; $A \cap B = \emptyset$; $A \subset C_E^B$; $A \setminus B = \emptyset$.
Y en a-t-il qui sont équivalentes, lesquelles ?

Exercice 2.8 Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. Montrer qu'on a :

(1) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(3) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Exercice 2.9 Vrai ou faux ? (Justifier par une preuve ou un contre-exemple) :

(1) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

(2) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Exercice 2.10 Soient A, B et C trois ensembles. Montrer :
(1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
(2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Exercice 2.11 Soient A une partie d'un ensemble E et B une partie d'un ensemble F. Donner le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$.

Exercice 2.12 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid \ n \leqslant k\}$. Que valent $\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ et $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, et leurs complémentaires dans $\mathbb{N}$?

Exercice 2.13 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid \ n \text{ est un multiple de } k\}$. Que valent $\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ et $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$?

Exercice 2.14 Soient A et B des parties d'un ensemble E.

(1) (i) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une partie X de E tel que $A \cap X = B$.

(ii) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une partie X de E tel que $A \cup X = B$.

(2) Si la condition nécessaire et suffisante est vérifiée, trouver tous les X vérifiant l'égalité (dans les deux cas).

3 Applications

Exercice 3.1 Soient E et F des ensembles, f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F. Ecrire avec des quantificateurs :
(1) $y \in f(A)$.
(2) la négation de $y \in f(A)$.
(3) $x \in f^{-1}(B)$.
(4) la négation de $x \in f^{-1}(B)$.

Exercice 3.2 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2.
(1) Déterminer $f(]-1,2])$.
(2) Déterminer $f^{-1}([-1,4])$.

Exercice 3.3 Soient $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{d, e\}$. Définir si possible une application f de E dans F tel que :
(1) $\forall\, y \in F \quad \exists\, x \in E$ tel que $f(x) = y$.
(2) $\exists\, x \in E$ tel que $\forall\, y \in F \ f(x) = y$.

Exercice 3.4 Soient E, F deux ensembles, f une application de E dans F. Ecrire avec des quantificateurs les proposition suivantes :
(1) f est injective.
(2) f n'est pas injective.
(3) f est surjective.
(4) f n'est pas surjective.

Exercice 3.5 Dire si f est injective, surjective, bijective. Si f est bijective, déterminer f^{-1}.
(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto x^2$.
(2) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que $n \mapsto n + 1$.
(3) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tel que $n \mapsto n + 1$.
(4) $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui à n associe $n/2$ si n est pair, $(-n + 1)/2$ si n est impair.

Exercice 3.6 Soit l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donnée par : $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 3.7 Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications données par : $f(x) = x - 1$ et $g(x) = x^2 + 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(1) Donner l'expression de $g \circ f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(2) Dire si $g \circ f$ est injective, surjective.
(3) Déterminer $(g \circ f)(]1, 2])$ et $(g \circ f)^{-1}(]-1, 0])$.

Exercice 3.8 Soit l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, donnée par : $(n, m) \mapsto n + m$.
(1) L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier.
(2) Déterminer $f(\mathbb{N} \times \{1\})$, $f^{-1}(\{3\})$ et $f^{-1}(\mathbb{N})$.

Exercice 3.9 Soit l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, donnée par : $f(x) = -x^2 + 5$. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{N})$ et $f^{-1}(\{-4, 0, 1, 6\})$.

Exercice 3.10 Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Démontrer que :
(1) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
(2) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
(3) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(4) $\forall A, B \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
(5) $\forall A \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 3.11 Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(n) = n + 1$.
(1) Montrer qu'il existe des applications g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
(2) Montrer qu'il n'existe aucune application h de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tel que $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 3.12 Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(1) f est injective.
(2) $\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad f^{-1}(f(X)) = X$.
(3) $\forall P, Q \in \mathcal{P}(E), \quad f(P \cap Q) = f(P) \cap f(Q)$.

Exercice 3.13 Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(1) f est surjective.
(2) $\forall\, Y \in \mathcal{P}(F) \quad f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Exercice 3.14 (1) Soient a, b deux réels. Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur α et β pour que l'équation $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ ait pour zéros les réels a et b.

(2) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'application donnée par : $f(x, y) = (x + y, xy)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(i) Montrer que f n'est pas injective.

(ii) Selon les valeurs de (α, β) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, déterminer l'image réciproque par f de $\{(\alpha, \beta)\}$.

(iii) f est-elle surjective ?

Exercice 3.15 Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques.
(1) Montrer que $A = B \Leftrightarrow f = g$.
(2) Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :
(i) $1 - f$.
(ii) fg.
(iii) $f + g - fg$.

Exercice 3.16 Soit E un ensemble, et A, B deux parties de E. On désigne par $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. *Dans les questions ci-après il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique introduite dans l'exercices 3.15.*
(1) Démontrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
(2) Démontrer que pour toutes les parties A, B, C de E, on a $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
(3) Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E, $A \triangle X = X \triangle A = A$.
(4) Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que $A \triangle A' = A' \triangle A = X$. ($X$ comme dans (3).)

Exercice 3.17 Soit $f : E \longrightarrow E$ une application tel que $f \circ f \circ f = f$. Montrer qu'on a :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Exercice 3.18 On considère quatre ensembles A, B, C, D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :
(1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
(2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
(3) $\big(g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives $\big) \Leftrightarrow \big(f, g$ et h sont bijectives$\big)$.

Exercice 3.19 Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ l'application donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$.

Exercice 3.20 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer qu'on a :
(1) ($g \circ f$ est surjective) et (g est injective) $\implies f$ est surjective.
(2) ($g \circ f$ est injective) et (f est surjective) $\implies g$ est injective.

Exercice 3.21 Soit $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective ou f est surjective si et seulement si $f = \mathrm{Id}_E$.

4 Relations d'ordre

Exercice 4.1 On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall\ m, n \in \mathbb{N}^*, \quad m\mathcal{R}n \iff m \text{ divise } n.$$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
(2) $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre total ?
(3) Représenter le diagramme de Hasse de l'ensemble $\{2, 3, 6, 21, 42\}$.
(4) $\mathbb{N}^*$ muni de la relation d'ordre $\mathcal{R}$ possède-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?
(5) Donner les éléments minimaux de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Exercice 4.2 La relation "divise" est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^*$?

Exercice 4.3 On définit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relation binaire $\prec$ par :

$$\forall\ (x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x, y) \prec (x', y') \iff |x' - x| \leqslant y' - y.$$

(1) Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
(2) L'ordre est-il total ?

Exercice 4.4 On considère sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation binaire $\mathcal{P}$ donnée par :

$$\forall\ (m, n), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (m, n)\mathcal{P}(p, q) \iff m \leqslant p \ \text{ et } \ n \leqslant q.$$

(1) Montrer que $\mathcal{P}$ est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total ?
(2) Donner un majorant et un minorant de l'ensemble $\{(3, 1), (2, 6), (2, 2), (0, 1), (7, 0)\}$.

Exercice 4.5 Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leqslant$. On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ donnée par :

$$\forall\ A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \,\mathcal{R}\, B \iff \begin{cases} A = B \text{ ou} \\ \forall\, a \in A, \forall\, b \in B \ \ a \leqslant b. \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$.

Exercice 4.6 On considère sur $\mathbb{N}^*$ la relation binaire $<<$ définie par :

$$\forall\ m, n \in \mathbb{N}^*, \quad m << n \iff \exists\, k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = m^k.$$

(1) Montrer que $<<$ est une relation d'ordre.
(2) Donner le plus petit et le plus grand élément de $\{2, 4, 16\}$.
(3) L'ensemble $\{2, 3\}$ admet-il un majorant ?

Exercice 4.7 (Ordre lexicographique) On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relation binaire définie par :

$$\forall\ (x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x, y)\mathcal{L}(x', y') \iff x < x' \ \text{ ou } \ (x = x' \text{ et } y \leqslant y').$$

(1) Montrer que $\mathcal{L}$ est une relation d'ordre total.
(2) Déterminer l'ensemble des majorants du singleton $\{(x, y)\}$, et le représenter dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercice 4.8 On considère les ensembles $A = \{1, 2, 4, 7\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ munis de l'ordre habituel. Écrire les éléments de $A \times B$ dans l'ordre lexicographique.

Exercice 4.9 Soit $\prec$ l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soit $\sqsubseteq$ la relation binaire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall\ (m,n),(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (m,n) \sqsubseteq (p,q) \iff m+n < p+q \text{ ou } (m+n = p+q \text{ et } (m,n) \prec (p,q)).$$

(1) Montrer que $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
(2) Représenter graphiquement l'ordre $\sqsubseteq$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exercice 4.10 Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre $\leqslant$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (A, f) tels que A soit une partie non vide de E et $f : A \longrightarrow E$ une application. On considère sur $\mathcal{E}$ la relation binaire $\triangleright$ définie par :

$$\forall\ (A,f),(B,g) \in \mathcal{E}, \quad (A,f) \triangleright (B,g) \iff \begin{cases} A \subset B \text{ et} \\ \forall x \in A,\ f(x) \leqslant g(x). \end{cases}$$

(1) Montrer que $\triangleright$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{E}$. L'ordre est-il total ?
(2) Soient (A, f), $(B, g) \in \mathcal{E}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la partie $\{(A, f), (B, g)\}$ soit majorée ?
(3) Même question avec minorée.

5 Récurrence

Exercice 5.1 Montrer par récurrence les affirmations suivantes :

(1) $\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$

(2) $\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \quad \sum_{k=1}^{n} k \times (k!) = (n+1)! - 1.$

(3) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

(4) $\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \quad \displaystyle\frac{n}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \leqslant \frac{n^2}{n+1}.$

(5) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$

(6) $\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

(7) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111. *(Utiliser que $10^3 = 9 \times 111 + 1$.)*

(8) $\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2}.$

(9) $\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Exercice 5.2 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, c'est-à-dire, $f(n) < f(m)$ lorsque $n < m$. Montrer que $f(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.3 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application donnée par : $f(x) = 4x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.
On pose $f^1, f^2, f^3, \cdots, f^n$ les applications $f, f \circ f, f^2 \circ f, \cdots, f^{n-1} \circ f$.
Déterminer une formule donnant $f^n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et $x \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.4 Soient $n \in \mathbb{N}_0$ et $a_1, \cdots, a_n \in [0, 1]$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) \geqslant 1 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right).$$

Exercice 5.5 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application vérifiant : $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad f(n) + f^2(n) + f^3(n) = 3n$.
(1) Montrer que f est injective.
(2) Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 5.6 Montrer par récurrence les affirmations suivantes :

(1) $\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \quad \displaystyle\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}.$

(2) $\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \quad \displaystyle\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n}.$

Exercice 5.7 Soient $n \in \mathbb{N}_0$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)$.

Exercice 5.8 (1) Soient A et B deux ensembles finis. Montrer que $\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B)$.
(2) Montrer par récurrence que si $A_1, \cdots, A_n$ sont des ensembles finis, alors $\mathrm{Card}\,(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\,(A_i)$.

Exercice 5.9 On se propose de déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(n+1) > f\left(f(n)\right) \tag{P}$$

(1) Donner un exemple d'une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ vérifiant la propriété (P).
(2) Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application vérifiant la propriété (P). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit l'ensemble $I_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geqslant n\}$.
(a) Montrer par récurrence que $f(I_n) \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Montrer que f est strictement croissante.
(c) En déduire que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

6 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 6.1 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_0$. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

(1) Si a divise b et c, alors $c^2 - 2b$ est multiple de a.
(2) S'il existe u et v entiers tels que $au + bv = d$ alors $\mathrm{pgcd}(a, b) = |d|$.
(3) Si a et b sont premiers entre eux, alors a et b^3 sont premiers entre eux.
(4) Si a divise $b + c$ et $b - c$, alors a divise b et a divise c.
(5) Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.
(6) Si a est multiple de b et si c est multiple de d, alors $a + c$ est multiple de $b + d$.
(7) Si 4 ne divise pas bc, alors b ou c est impair.
(8) Si a divise b et b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.
(9) Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.
(10) Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.
(11) Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.
(12) Si 91 divise ab, alors 91 divise a ou 91 divise b.

Exercice 6.2 Sachant que $24396465 = 6453 \times 3780 + 4125$, quel est le quotient de la division Euclidienne de 24396465 par 3780.

Exercice 6.3 Dans la division Euclidienne de a par b, le quotient est q et le reste est r. On suppose que $q = r = 37$. Quel est la plus petite valeur possible que peut prendre a ?

Exercice 6.4 On considère la suite croissante de tous les entiers qui ne sont pas des multiples de 7 $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, \cdots)$. On a que 1 est de rang 1, 2 est de rang 2, 3 est de rang 3, 4 est de rang 4, 5 est de rang 5, 6 est de rang 6, 8 est de rang 7, $\cdots$

(1) Donner le rang de 47, puis le rang de 741.
(2) Donner les entiers de rang 26, 52.

Exercice 6.5 Soit $n \in \mathbb{N}$ dont le reste de la division Euclidienne par 5 est 2 ou 3. Montrer que n^2+1 est divisible par 5.

Exercice 6.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On divise 2003 par n les reste est égal à 8. On divise 3002 par n, le reste obtenu est 27. Que vaut n ?

Exercice 6.7 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que soit 8 divise n^2, soit 8 divise n^2-1, soit 8 divise n^2-4.
(Discuter sur la parité de n.)

Exercice 6.8 Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6.9 Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ tel que $n-1$ divise n^2+1.
(Utiliser que $n^2+1 = (n^2-1)+2$).

Exercice 6.10 Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que si p divise $(p-1)!+1$, alors p est premier.

Exercice 6.11 (1) Pour $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $1 < n \leqslant m$, montrer que $m!+n$ n'est pas premier.
(2) Donner une liste de 100 entiers consécutifs non premiers.

Exercice 6.12 Soient $a, b \in \mathbb{Z}_0$. Montrer que si :
(1) $\exists\, q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq$, alors $\operatorname{pgcd}(a, b) = |b|$.
(2) $\exists\, q \in \mathbb{Z}$ et $\exists\, r \in \mathbb{Z}_0$ tel que $a = bq + r$, alors $\operatorname{pgcd}(a, b) = \operatorname{pgcd}(b, r)$.
(au (2) r n'est pas nécessairement le reste de la division Euclidienne de a par b.)

Exercice 6.13 (Application de l'exercice 6.12)
(1) Déterminer $\operatorname{pgcd}(1306, 128)$ et trouver deux entiers $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $1306n + 128m = 4$.
(2) Déterminer $\operatorname{pgcd}(6n^2 + 4n + 9, 3n + 2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(3) Soient $a, b \in \mathbb{N}_0$. Montrer que $\operatorname{pgcd}(a, b) = \operatorname{pgcd}(17a + 5b, 7a + 2b)$.

Exercice 6.14 (1) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$. On suppose que $\operatorname{pgcd}(c, d) = 1$ et que a divise bc et bd. Montrer que a divise b.

(2) Soient $a, b \in \mathbb{Z}_0$ et $d \in \mathbb{N}_0$ un diviseur commun à a et b. Montrer l'équivalence suivante :

$$d = \operatorname{pgcd}(a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{pgcd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1.$$

(3) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}_0$. Montrer qu'on a $\operatorname{pgcd}(ac, bc) = |c| \operatorname{pgcd}(a, b)$.

(4) Soit p un entier premier supérieur ou égal à 3. Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $p = a^2 - b^2$.

Exercice 6.15 On souhaite trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant l'équation

$$325x + 299y = 39 \qquad \text{(E)}$$

(1) Déterminer pgcd$(325, 299)$. Simplifier l'équation (E) sous la forme $ax + by = c$ avec a et b premiers entre eux.
(2) Déterminer deux entiers n et m tel que $an + bm = 1$.
(3) Déterminer une solution particulière de l'équation (E).
(4) Trouver toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice 6.16 (1) Soient $a, b, c \in \mathbb{N}_0$. Montrer que $a^b - 1$ divise $a^{bc} - 1$.
(2) En déduire que si $2^p - 1$ est premier pour $p \in \mathbb{N}_0$, alors p est premier.

Exercice 6.17 (1) Montrer que le produit de deux entiers de la forme $4n+1$ est un entier de la forme $4n + 1$.
(2) Montrer que tout entier impair s'écrit de manière unique sous la forme $4n + 1$ ou $4n - 1$.
(3) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n - 1$.

7 Ensembles finis - Dénombrement

Exercice 7.1 Soient E un ensemble non vide fini et F une partie stricte de E. Montrer que F est finie et $\mathrm{Card}(F) < \mathrm{Card}(E)$.

Exercice 7.2 Soit E un ensemble non vide fini de cardinal n et F un ensemble non vide fini de cardinal m. Quel est le nombre d'applications de E vers F ?

Exercice 7.3 Soient E et F deux ensembles finis non vide.
(1) Montrer qu'il existe une application injective de E vers F si et seulement si $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
(2) Supposons que $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$. Quel est le nombre d'injections de E ver F ?
(3) Montrer qu'il existe une surjection de E vers F si et seulement si $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$.
(4) Combien y a-t-il d'applications injectives d'un ensemble de cardinal n vers un ensemble de cardinal $n + 1$?
(5) Combien y a-t-il d'applications surjectives d'un ensemble de cardinal $n + 1$ vers un ensemble de cardinal n ?

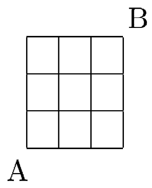
Exercice 7.4 Soient E et F deux ensembles non vides finis de même cardinal. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
(1) f est injective.
(2) f est surjective.
(3) f est bijective.

Exercice 7.5 (1) Soient E et F deux ensembles avec F un ensemble fini. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application surjective telle que : $\forall y \in F$, $\mathrm{Card}(f^{-1}(\{y\})) = p$. Montrer alors que E est fini et $\mathrm{Card}(E) = p\mathrm{Card}(F)$.

(2) Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ p éléments distincts d'un ensemble E, répartis entre une famille de n sous-ensembles de E. Si $n < p$ montrer qu'il existe au moins un ensemble de la famille contenant au moins deux éléments parmi les α_i.

Exercice 7.6 (1) Combien de mots de six lettres peut-on former avec 3 lettres D et 3 lettres H.

(2) En utilisant la question (1) donner le nombre de chemins possibles pour aller de A vers B en suivant le quadrillage (on autorise que deux directions : vers le haut et vers la droite) :



Exercice 7.7 (1) En hiver une campagnie aérienne dessert 6 villes. Quel est le nombre de lignes en services ?
(2) En été, la compagnie a 45 lignes en services. Quel est le nombre de villes desservies ?

Exercice 7.8 (1) Sans répitions, combien de nombres de trois chiffres peut-on former avec les chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9.
(2) Combien de ces nombres sont :
(i) inférieurs à 500.
(ii) impairs.
(iii) pairs.
(iv) divisibles par 5.

Exercice 7.9 (Formule du binôme de Newton) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la formule :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 7.10 On dispose de k cases et de n objets. On veut disposer les objets dans les cases de la manière suivante : n_1 objets dans la première case, n_2 objets dans la deuxième case, $\cdots$, n_k objets dans la k-ième case, avec $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Quel est le nombre de dispositions possibles ?

Exercice 7.11 Quel est le coefficient du terme $a^2b^3c^5$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$?

Exercice 7.12 Soient p un entier premier et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 < k < p$.
(1) Montrer que p divise C_p^k.
(2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, p divise $n^p - n$.

Exercice 7.13 Soient $n \in \mathbb{N}_0$ et p un entier premier tel que $n < p \leqslant 2n$. Montrer que p divise C_{2n}^n.

Exercice 7.14 Soient n et p des entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n-1$. Démontrer que $1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^p C_n^p = (-1)^p C_{n-1}^p$.

Exercice 7.15 En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \qquad S_2 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \qquad S_3 = \sum_{0 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}} C_n^{2i}.$$

Exercice 7.16 Soit E un ensemble non vide fini de cardinal n.
(1) Quel est le nombre de parties X et Y de E telles que $X \subset Y$?
(2) Soit X une partie de E à p éléments. Combien y a t-il de parties de E disjointes de X ?
(3) Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = \emptyset$?

Exercice 7.17 Soient E un ensemble non vide et $X, Y \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ telles que $E = X \cup Y$ et $X \cap Y = \emptyset$.
(1) Monter que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \\ A & \mapsto & (A \cap X, A \cap Y) \end{array}$ est une bijection.
(2) Montrer que pour tous $p, q, r \in \mathbb{N}$ tels que $r \leqslant p + q$, on a $\sum_{i+j=r} C_p^i C_q^j = C_{p+q}^r$.
(3) En déduire que $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

Exercice 7.18 En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, l'entier $m^{2p+1} + n^{2p+1}$ est divisible par $m + n$.

Exercice 7.19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
(1) En utilisant la fonction $x \mapsto (1 + x)^n$, calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3 C_n^k$.
(2) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$.

Exercice 7.20 (1) Montrer qu'on a $C_n^k \cdot C_{n-k}^{p-k} = C_p^k \cdot C_n^p \quad \forall\, 0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$.
(2) En déduire que $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p$.
(3) Montrer que $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k \cdot C_{n-k}^{p-k} = 0$.

Exercice 7.21 Soient E un ensemble non vide fini à n éléments et A une partie de E à p éléments. Quel est le nombre de parties de E contenant un seul élément de A ?

Exercice 7.22 Utiliser la formule du binôme de Newton pour montrer :
(1) $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair.
(2) $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 7.23 Soit p un nombre premier.
(1) Montrer que pour tout $1 \leqslant k \leqslant p - 1$, le coefficient binômial C_p^k est divisible par p.
(2) En déduire que, quel que soit l'entier naturel n, le nombre $(n + 1)^p - n^p - 1$ est divisible par p.
(3) Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, le nombre $n^p - n$ est divisible par p (On pourra utiliser une récurrence).
(4) (Petit théorème de Fermat) Montrer que pour tout entier naturel n premier avec p, le nombre $n^{p-1} - 1$ est divisible par p.

Correction (Ensembles)

Exercice 2.1 : Non. En effet, $\emptyset$ est l'ensemble vide, l'ensemble $\{\emptyset\}$ est formé d'un seul élément qui est $\emptyset$, et l'ensemble $\{\{\emptyset\}\}$ est formé d'un seul élément qui est $\{\emptyset\}$.

Exercice 2.2 : On a huit éléments : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\cdots$

Exercice 2.3 :

(1) Montrons que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. On procède par équivalences :

$$\begin{array}{rcl} x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) & \Longleftrightarrow & (x \in A \cup B) \text{ et } (x \in A \cup C) \\ & \Longleftrightarrow & [x \in A \text{ ou } x \in B] \text{ et } [x \in A \text{ ou } x \in C] \\ & \Longleftrightarrow & x \in A \text{ ou } [x \in B \text{ et } x \in C] \\ & \Longleftrightarrow & x \in A \text{ ou } [x \in B \cap C] \\ & \Longleftrightarrow & x \in A \cup (B \cap C). \end{array}$$

Ceci montre que les ensembles $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cup (B \cap C)$ contiennent les mêmes éléments, et donc ils sont égaux.

(2) Montrons que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} x \in A \cap (B \cup C) & \Longleftrightarrow & x \in A \text{ et } x \in B \cup C \\ & \Longleftrightarrow & x \in A \text{ et } [x \in B \text{ ou } x \in C] \\ & \Longleftrightarrow & [x \in A \text{ et } x \in B] \text{ ou } [x \in A \text{ et } x \in C] \\ & \Longleftrightarrow & x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C \\ & \Longleftrightarrow & x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{array}$$

Ainsi, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 2.4 : (1) Montrons que $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$. On a :

$$\begin{array}{rcl} x \in C_E^{A \cup B} & \Longleftrightarrow & x \in E \text{ et } x \notin A \cup B \\ & \Longleftrightarrow & x \in E \text{ et } [x \notin A \text{ et } x \notin B] \\ & \Longleftrightarrow & [x \in E \text{ et } x \notin A] \text{ et } [x \in E \text{ et } x \notin B] \\ & \Longleftrightarrow & x \in C_E^A \text{ et } x \in C_E^B \\ & \Longleftrightarrow & x \in C_E^A \cap C_E^B. \end{array}$$

Ainsi, $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.

(2) Montrons que $C_E^{\cup_{i \in I} A_i} = \cap_{i \in I} C_E^{A_i}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} x \in C_E^{\cup_{i \in I} A_i} & \Longleftrightarrow & x \in E \text{ et } x \notin \cup_{i \in I} A_i \\ & \Longleftrightarrow & x \in E \text{ et } [\forall i \in I \ \ x \notin A_i] \\ & \Longleftrightarrow & \forall i \in I \quad x \in E \text{ et } x \notin A_i \\ & \Longleftrightarrow & \forall i \in I \ \ x \in C_E^{A_i} \\ & \Longleftrightarrow & x \in \cap_{i \in I} C_E^{A_i}. \end{array}$$

Ainsi, $C_E^{\cup_{i \in I} A_i} = \cap_{i \in I} C_E^{A_i}$.

On procède de la même façon pour montrer que $C_E^{\cap_{i \in I} A_i} = \cup_{i \in I} C_E^{A_i}$.

Exercice 2.5 :

(1) Montrons que $A \cap B = A \cap C \iff A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$. On va montrer les deux implications.

$\implies$: Supposons que $A \cap B = A \cap C$ et montrons que $A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$.

Montrons que $A \cap C_E^B \subset A \cap C_E^C$. Soit $x \in A \cap C_E^B$. Alors, $x \in A$ et $x \notin B$. Ce qui implique que $x \notin A \cap B$. Ainsi, $x \notin A \cap C$ car, par hypothèse, $A \cap B = A \cap C$. Comme $x \in A$, on a nécessairement $x \notin C$. Donc, $x \in A \cap C_E^C$. Par conséquent, $A \cap C_E^B \subset A \cap C_E^C$.

On montre de la même façon que $A \cap C_E^C \subset A \cap C_E^B$. D'où, $A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$.

$\impliedby$: Supposons que $A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$ et montrons que $A \cap B = A \cap C$.

Par l'implication $\implies$, qu'on vient de montrer, l'hypothèse $A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$ implique que $A \cap C_E^{C_E^B} = A \cap C_E^{C_E^C}$. Ainsi, $A \cap B = A \cap C$ car $C_E^{C_E^B} = B$ et $C_E^{C_E^C} = C$.

(2) Montrons que $A \cap B = A \cup B \implies A = B$, c'est-à-dire, supposons que $A \cap B = A \cup B$ et montrons que $A = B$.

Soit $x \in A$. Alors, $x \in A \cup B$. Comme $A \cup B = A \cap B$, on obtient que $x \in A \cap B$. En particulier, $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$.

On montre de la même façon que $B \subset A$. D'où, $A = B$.

Exercice 2.6 :

(2) Montrons que $(A \cup C \subset A \cup B \ \ et \ \ A \cap C \subset A \cap B) \implies C \subset B$, c'est-à-dire, supposons que $(A \cup C \subset A \cup B \ \ et \ \ A \cap C \subset A \cap B)$ et montrons que $C \subset B$.

Soit $x \in C$. Comme $C \subset A \cup C$, on obtient que $x \in A \cup C$. Par conséquent, $x \in A \cup B$ car $A \cup C \subset A \cup B$. Ainsi, $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in B$ c'est ce qu'on cherche. Si $x \in A$, alors $x \in A \cap C$. Ce qui implique que $x \in A \cap B$ car $A \cap C \subset A \cap B$. En particulier, $x \in B$. Par conséquent, $C \subset B$.

(3) Appliquer (2).

Exercice 2.7 :

- $A \subset B \iff \forall x \in A \ \ x \in B$.
- $A \not\subset B \iff \exists x \in A \ \ x \notin B$.
- $A \cap B = \emptyset \iff \forall x \in A \ \ x \notin B$.
- $A \subset C_E^B \iff \forall x \in A \ \ x \notin B$.
- $A \setminus B = \emptyset \iff \forall x \in A \ \ x \in B$.

On voit bien qu'on a : $A \subset B \iff A \setminus B = \emptyset$, et $A \cap B = \emptyset \iff A \subset C_E^B$.

Exercice 2.8 :

(1) Montrons que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. On a :

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } x \notin B \cup C \\
&\iff x \in A \text{ et } [x \notin B \text{ et } x \notin C] \\
&\iff [x \in A \text{ et } x \notin B] \text{ et } [x \in A \text{ et } x \notin C] \\
&\iff x \in A \setminus B \text{ et } x \in A \setminus C \\
&\iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C).
\end{aligned}$$

Ainsi, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Donner une preuve de (2) et (3).

Exercice 2.9 :

(1) Vrai.

(2) Faux.

Exercice 2.11 :

$(C_E^A \times F) \cup (E \times C_F^B)$.

Exercice 2.12 :

On a $\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{0\}$ et $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \mathbb{N}$.

Exercice 2.13 :

On a $\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{0\}$ et $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \mathbb{N}$.

Exercice 2.14 :

(1)(i) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe X tel que $A \cap X = B$ est que B soit inclu dans A. En effet, si $B \subset A$, alors on a $A \cap X = B$ pour $X = B$. Réciproquement, s'il existe X tel que $A \cap X = B$, alors $B \subset A$.

(ii) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe X tel que $A \cup X = B$ est que A soit inclu dans B. Justifier.

(2) (i) Supponons qu'on ait $B \subset A$. Alors, tout ensemble X vérifiant $A \cap X = B$ doit contenir B, et il ne doit pas contenir des éléments de C_A^B, c'est-à-dire, $X = B \cup B'$ où $B' \subset C_E^A$. Justifier.

(ii) De même, supposons qu'on ait $A \subset B$. Alors, tout ensemble X vérifiant $A \cup X = B$ doit être inclu dans B, et il doit contenir C_B^A, c'est-à-dire, $X = C_B^A \cup B''$ où $B'' \subset A$. Justifier.

Correction
(Applications)

Exercice 3.1 :

– $y \in f(A) \iff \exists\, x \in A \;\; y = f(x)$.
– $y \notin f(A) \iff \forall\, x \in A \;\; y \neq f(x)$.
– $x \in f^{-1}(B) \iff \exists\, y \in B \;\; y = f(x)$.
– $x \notin f^{-1}(B) \iff \forall\, y \in B \;\; y \neq f(x)$.

Exercice 3.2 :

(1) On a $f(]-1,2]) = [0,4]$ et $f^{-1}([-1,4]) = [-2,2]$ (justifier).

Exercice 3.3 :

(1) Par exemple, on peut prendre $f : E \longrightarrow F$ donnée par : $f(a) = d$, $f(b) = d$ et $f(c) = e$.
(2) On ne peut pas définir une application car chaque élément de E doit être envoyé sur un unique élément de F.

Exercice 3.4 :

(1) f injective $\iff (\forall\, x, x' \in E \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'))$.
(2) f n'est pas injective $\iff (\exists\, x, x' \in E \quad x \neq x'$ et $f(x) = f(x'))$.
(3) f surjective $\iff (\forall\, y \in F \;\; \exists\, x \in E \quad f(x) = y)$.
(4) f n'est pas surjective $\iff (\exists\, y \in F \;\; \forall\, x \in E \quad f(x) \neq y)$.

Exercice 3.5 :

(1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^2$.
• f n'est pas injective car $1 \neq -1$ et $f(1) = f(-1)$.
• f n'est pas surjective car il n'existe aucun réel x tel que $f(x) = -1$.

(2) Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que $f(n) = n + 1$.
• f est injective car pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, si $f(n) = f(m)$, alors $n + 1 = m + 1$, ce qui donne $n = m$.
• f n'est pas surjective car il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 0$.

(3) Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = n + 1$.
• f est injective (même justification que dans (2)).
• f est surjective, car pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $n - 1 \in \mathbb{Z}$ et $f(n - 1) = n$.
Ainsi, f est bijective. Trouvons la réciproque de f. Pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, on sait que

$$\begin{aligned} f^{-1}(n) = m &\iff n = f(m) \\ &\iff n = m + 1 \\ &\iff m = n - 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $f^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, qui à n associe $n - 1$.

(4) Soit $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui à n assoice $n/2$ si n est pair, $(-n+1)/2$ si n est impair.
• f est injective. En effet, soient $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $f(n) = f(m)$. Montrons que $n = m$. L'hypothèse $f(n) = f(m)$ implique l'une des conditions suivantes :
$[n/2 = m/2]$ ou $[(-n+1)/2 = (-m+1)/2]$ ou $[(-n+1)/2 = m/2]$ ou $[n/2 = (-m+1)/2]$.
Si on a l'une des deux premières possibilités, alors clairement $n = m$. Si on a l'une des deux dernières possibilités, alors on obtient $n + m = 1$, ce qui n'est pas possible car l'hypothèse $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ implique $n + m \geqslant 2$. Par conséquent, $f(n) = f(m)$ implique que $n = m$.

• f est surjective. En effet, soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n > 0$, alors $2n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est pair et $f(2n) = n$. Si $n \leqslant 0$, alors $-2n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, l'entier $-2n + 1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est impair et $f(-2n + 1) = n$.

Ainsi, f est bijective. L'expression de f^{-1} se déduit de la preuve de la surjectivité de f. On a f^{-1} : $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ qui à n associe $2n$ si $n > 0$, $-2n + 1$ si $n \leqslant 0$.

Exercice 3.7 :

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x-1) = (x-1)^2 + 2(x-1) = x^2 - 1$.
(2) f n'est ni injective ni surjective. Justifier.
(3) Comme dans la correction de l'exercice 3.2, on trouve (justifier) :

$$(g \circ f)(]1,2]) =]0,3] \quad \text{et} \quad (g \circ f)^{-1}(]-1,0]) = [-1,0[\cup]0,1].$$

Exercice 3.10 :

(1) Supposons que $A \subset B$ et montrons que $f(A) \subset f(B)$.

$$\begin{array}{rcll} y \in f(A) & \Longrightarrow & \exists\, x \in A \quad y = f(x) & \\ & \Longrightarrow & \exists\, x \in B \quad y = f(x) & (\text{car } A \subset B) \\ & \Longrightarrow & y \in f(B) & \end{array}$$

(2) Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, il resute de l'assertion (1) que $f(A \cap B) \subset f(A)$ et $f(A \cap B) \subset f(B)$. Ainsi, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(3) Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. On va montrer la double inclusion.
$\supset$: Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on déduit de l'assertion (1) que $f(A) \subset f(A \cup B)$ et $f(B) \subset f(A \cup B)$. Par conséquent, $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
$\subset$: Soit $y \in f(A \cup B)$. Alors, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Donc, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$ suivant que $x \in A$ ou $x \in B$. Par conséquent, $y \in f(A) \cup f(B)$. Ainsi, $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

(4) Montrons que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(A \cup B) & \Longleftrightarrow & f(x) \in A \cup B \\ & \Longleftrightarrow & f(x) \in A \quad \text{ou} \quad f(x) \in B \\ & \Longleftrightarrow & x \in f^{-1}(A) \quad \text{ou} \quad x \in f^{-1}(B) \\ & \Longleftrightarrow & x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{array}$$

(5) Montrons que $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$. Soit $x \in E$, on a alors les équivalences :

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(F \setminus A) & \Longleftrightarrow & f(x) \in F \setminus A \\ & \Longleftrightarrow & f(x) \notin A \\ & \Longleftrightarrow & x \notin f^{-1}(A) \\ & \Longleftrightarrow & x \in E \setminus f^{-1}(A). \end{array}$$

Exercice 3.11 :

Soit $f \in \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application définie par : $f(n) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Soit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application qui envoie 0 sur 0, et tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sur $n - 1$. Alors, on a $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1) - 1 = n$ (car $n + 1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Ceci signifie que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

(2) Supposons qu'il existe une application $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f \circ h(n) = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}(n)$, ce qui signifie que $f(h(n)) = n$, c'est-à-dire, $h(n) + 1 = n$. En particulier, pour $n = 0$, on doit avoir $h(0) + 1 = 0$, une contradiction puisque $h(0) \in \mathbb{N}$ donne $h(0) + 1 \geqslant 1$.

Exercice 3.12 :

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons que f soit injective. Montrons que $f^{-1}(f(X)) = X$ pour toute partie X de E.

Soit X une partie de E. On a : $x \in X \implies f(x) \in f(X) \implies x \in f^{-1}(f(X))$. Ainsi, $X \subset f^{-1}(f(X))$. Réciproquement, $x' \in f^{-1}(f(X)) \implies f(x') \in f(X) \implies \exists\, x'' \in X \quad f(x') = f(x'') \implies x' = x'' \in X$ (car f est injective). Ainsi, $f^{-1}(f(X)) \subset X$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Supposons que $f^{-1}(f(X)) = X$ pour toute partie X de E. Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(x) = f(x') & \Longrightarrow & f(x') \in \{f(x)\} \\ & \Longrightarrow & f(x') \in f(\{x\}) \\ & \Longrightarrow & x' \in f^{-1}(f(\{x\})) \\ & \Longrightarrow & x' \in \{x\} \quad \text{(car, par hypothèse, } f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}) \\ & \Longrightarrow & x = x'. \end{array}$$

(1) $\Longrightarrow$ (3) Supposons que f soit injective. Montrons que $f(P \cap Q) = f(P) \cap f(Q)$ pour toutes parties P et Q de E.

Soient P, Q des parties de E. D'après l'assertion (2) de l'exercice 3.10, on a que $f(P \cap Q) \subset f(P) \cap f(Q)$. Réciproquement, $y \in f(P) \cap f(Q)$ implique qu'il existe $x \in P$ et $x' \in Q$ tels que $y = f(x) = f(x')$. Puisque f est injective, on obtient $x = x'$. Par conséquent, $x \in P \cap Q$ et $y = f(x) \in f(P \cap Q)$. Ainsi, $f(P) \cap f(Q) \subset f(P \cap Q)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Supposons que $f(P \cap Q) = f(P) \cap f(Q)$ pour toutes parties P, Q de E. Montrons que f est injective.

Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(x) = f(x') & \Longrightarrow & \{f(x)\} = \{f(x')\} \\ & \Longrightarrow & f(\{x\}) = f(\{x'\}) \\ & \Longrightarrow & f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = f(\{x\}) \\ & \Longrightarrow & f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\{x\}) \quad \text{(car, par hypothèse, } f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = f(\{x\} \cap \{x'\})) \\ & \Longrightarrow & f(\{x\} \cap \{x'\}) \neq \emptyset \\ & \Longrightarrow & \{x\} \cap \{x'\} \neq \emptyset \\ & \Longrightarrow & x = x'. \end{array}$$

Ainsi, on a montré les équivalences (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3).

Exercice 3.13 :

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons que f soit surjective. Montrons que $f(f^{-1}(Y)) = Y$ pour toute partie Y de F.

Soit Y une partie de F. Si $y \in f(f^{-1}(Y))$, alors il existe $x \in f^{-1}(Y)$ tel que $y = f(x)$. Mais, $x \in f^{-1}(Y)$ implique que $f(x) \in Y$. Ainsi, $y \in Y$. Par conséquent, $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$. Réciproquement, si $y' \in Y$, alors il existe $x' \in E$ tel que $f(x') = y' \in Y$ (car f est surjective). Ainsi, $x' \in f^{-1}(Y)$. Par conséquent, $y' = f(x') \in f(f^{-1}(Y))$. D'où, $Y \subset f(f^{-1}(Y))$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Supposons que $f(f^{-1}(Y)) = Y$ pour tout Y une partie de F. Montrons que f est surjective.

Soit $y \in F$. Comme $\{y\}$ est une partie de F, on déduit par hypothèse $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$. Par conséquent, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, c'est-à-dire, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 3.14 :

(1) a, b sont des racines de $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ si et seulement si $(x - a)(x - b) = x^2 - \alpha x + \beta$ si et seulement si $a + b = \alpha$ et $ab = \beta$.

(2) (i) f n'est pas injective, par exemple, on a $(1, 0) \neq (0, 1)$ et $f((1, 0)) = f((0, 1))$.
(ii) On a :

$$\begin{array}{rcl} (a, b) \in f^{-1}((\alpha, \beta)) & \Longleftrightarrow & f((a, b)) = (\alpha, \beta) \\ & \Longleftrightarrow & (a + b, ab) = (\alpha, \beta) \\ & \Longleftrightarrow & a + b = \alpha \text{ et } ab = \beta \\ & \Longleftrightarrow & a, b \text{ sont des racines de l'équation } x^2 - \alpha x + \beta = 0. \end{array}$$

Soit $\triangle = \alpha^2 - 4\beta$ le discriminant de l'équation $x^2 - \alpha x + \beta = 0$. On a trois cas :

– Si $\triangle < 0$, alors l'équation $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $f^{-1}((\alpha, \beta)) = \emptyset$.
– Si $\triangle = 0$, alors l'équation $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ admet une racine double r dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $f^{-1}((\alpha, \beta)) = \{(r, r)\}$.
– Si $\triangle > 0$, alors l'équation $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ admet deux racines distinctes r et s dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $f^{-1}((\alpha, \beta)) = \{(r, s), (s, r)\}$.

Exercice 3.17 :

Supposons qu'on ait $f \circ f \circ f = f$. Montrons l'équivalence : f est injective $\Longleftrightarrow$ f est surjective.

$\Longrightarrow$: Supposons que f soit injective. Montrons que f est surjective. Soit $y \in E$. Puisque $f \circ f \circ f = f$, on obtient $f \circ f \circ f(y) = f(y)$, c'est-à-dire, $f(f \circ f(y)) = f(y)$. Puisque f est injective, on déduit que $f \circ f(y) = y$. Ainsi, $y = f(x)$ où $x = f(y)$.

$\Longleftarrow$: Supposons que f soit surjective. Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. Puisque f est surjective, il existe $a, a' \in E$ tels que $x = f(a)$ et $x' = f(a')$. Ainsi, $f(f(a)) = f(f(a'))$. Puisque f est une application, on obtient $f(f(f(a))) = f(f(f(a')))$. Par conséquent, $f(a) = f(a')$ (car, par hypothèse, $f \circ f \circ f = f$), c'est-à-dire, $x = x'$.

Exercice 3.19 :

Montrons que $f \circ f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$. Soit $x \in [0, 1]$.

• Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) = x$. Ainsi, $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x) = x$.

• Si $x \notin \mathbb{Q}$. Alors, $1 - x \in [0, 1]$ mais $1 - x \notin \mathbb{Q}$. Ainsi, $f(x) = 1 - x$ et $f(1 - x) = 1 - (1 - x) = x$. Par conséquent, $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(1 - x) = x$.

Ainsi, $f \circ f(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$, c'est-à-dire, $f \circ f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$.

Correction
(Récurrence)

Exercice 5.1 :

(3) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $\quad 7$ divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

– $P(0)$ est vraie car 7 divise $7 = 3^{2\times 0+1} + 2^{0+2}$.

– Supposons que $P(n)$ soit vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} = 7 \times 3^{2n+1} + 2 \times (3^{2n+1} + 2^{n+2}).$$

Comme $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 (car $P(n)$ est vraie), et $7 \times 3^{2n+1}$ est divisible par 7, on déduit que $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ est divisible par 7.

Par conséquent, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(4) Pour $n \in \mathbb{N}_0$, soit $P(n)$ la propriété : $\quad \dfrac{n}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+1} \leqslant \dfrac{n^2}{n+1}$.

– $P(1)$ est vraie car $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \dfrac{k}{k+1} = \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1^2}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

– Supposons que $P(n)$ soit vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Puisque $P(n)$ est vraie, on a $\dfrac{n}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+1} \leqslant \dfrac{n^2}{n+1}$. Par conséquent :

$$\frac{n}{2} + \frac{n+1}{n+2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\right) + \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{n^2}{n+1} + \frac{n+1}{n+2}.$$

Un simple calcul montre que $\dfrac{n+1}{2} \leqslant \dfrac{n}{2} + \dfrac{n+1}{n+2}$ et $\dfrac{n^2}{n+1} + \dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{(n+1)^2}{n+2}$.

Par conséquent, $\dfrac{n}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+1} \leqslant \dfrac{n^2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Exercice 5.2 : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $\quad f(n) \geqslant n$

– $P(0)$ est vraie car $f(0) \in \mathbb{N}$ implique que $f(0) \geqslant 0$.

– Supposons que $P(n)$ soit vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Puisque f est strictement croissante, on a $f(n+1) > f(n)$. Ainsi, $f(n+1) > f(n) \geqslant n$ (car $P(n)$ est vraie). Donc, $f(n+1) > n$. Comme $f(n)$ et n sont des entiers naturels, la condition $f(n+1) > n$ implique $f(n+1) \geqslant n+1$, c'est-à-dire, $P(n+1)$ est vraie.

Par conséquent, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, $f(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.3 : On commence par déterminer f^n pour $n = 1, 2, 3 \cdots$, ce qui va nous orienter vers une formule générale.

(a) Cas où $n = 1$: On a $f^1(x) = f(x) = 4x + 3 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Cas où $n = 2$: $f^2(x) = f \circ f(x) = f(f(x)) = 4(4x+3) + 3 = 4^2 x + 15 = 4^2 x + 4^2 - 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.

(c) Cas où $n = 3$: $f^3(x) = f^2 \circ f(x) = f^2(f(x)) = 4^2(4x+3) + 4^2 - 1 = 4^3 x + 4^3 - 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.

Montrons par récurrence qu'on la propriété $P(n)$: $\quad f^n(x) = 4^n x + 4^n - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

– Le cas (a) montre que $P(1)$ est vraie.

– Supposons que $P(n)$ soit vraie, montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{n+1}(x) = f^n \circ f(x) = f^n(f(x)) = f^n(4x+3) = 4^n(4x+3) + 4^n - 1 = 4^{n+1}x + 4^n \times 3 + 4^n - 1 = 4^{n+1}x + 4^{n+1} - 1$.

Ainsi, $f^n(x) = 4^n x + 4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.4 : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $\prod_{k=1}^n (1-a_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^n a_k$ pour tout $a_1, \cdots, a_k \in [0,1]$.

– $P(1)$ est vraie car $\prod_{k=1}^1 (1-a_k) = 1 - a_1 \geqslant 1 - a_1 = 1 - \sum_{k=1}^1 a_k$.

– Supposons que $P(n)$ soit vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie. Soient $a_1, \cdots, a_{n+1} \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
P(n) \text{ vraie} \quad &\Longrightarrow \quad \textstyle\prod_{k=1}^n (1-a_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^n a_k \\
&\Longrightarrow \quad (\textstyle\prod_{k=1}^n (1-a_k)) \times (1-a_{n+1}) \geqslant (1 - \sum_{k=1}^n a_k) \times (1 - a_{n+1}) \quad (\text{car } \ 1 - a_{n+1} \geqslant 0). \\
&\Longrightarrow \quad \textstyle\prod_{k=1}^{n+1} (1-a_k) \geqslant (1 - \sum_{k=1}^{n+1} a_k) + a_{n+1}(\sum_k^n a_k) \\
&\Longrightarrow \quad \textstyle\prod_{k=1}^{n+1} (1-a_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n+1} a_k \quad (\text{car } \ a_{n+1}(\sum_k^n a_k) \geqslant 0) \\
&\Longrightarrow \quad P(n+1) \text{ est vraie.}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\prod_{k=1}^n (1-a_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^n a_k$ pour tout $a_1, \cdots, a_n \in [0,1]$.

Exercice 5.5 : (1) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(m)$. Montrons que $n = m$.
Puisque $f(n) = f(m)$, alors $f(f(n)) = f(f(m))$ (car f une application), c'est-à-dire, $f^2(n) = f^2(m)$. De même, $f^2(n) = f^2(m)$ implique que $f^3(n) = f^3(m)$. Ainsi,

$$f(n) + f^2(n) + f^3(n) = f(m) + f^2(m) + f^3(m).$$

Par conséquent, $3n = 3m$, ce qui implique $n = m$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $f(n) = n$.

On va montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant le second principe de récurrence.

– $P(0)$ est vraie car $f(0) + f^2(0) + f^3(0) = 3 \times 0 = 0$ implique que $f(0) = 0$.

– Soit $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $P(k)$ soit vraie pour tout $k < n$. Montrons que $P(n)$ est vraie.

Puisque $f(k) = k$ pour tout $k < n$ et que f est injective, on a nécessairement que $f(n) \notin \{0, 1, \cdots, n-1\}$. La même remarque implique aussi que $f^2(n) \notin \{0, 1, \cdots, n-1\}$ et $f^3(n) \notin \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Ainsi, $f(n) \geqslant n$, $f^2(n) \geqslant n$ et $f^3(n) \geqslant n$. Comme $f(n) + f^2(n) + f^2(n) = 3n$, on a nécessairement que $f(n) = f^2(n) = f^3(n) = n$, en particulier, $f(n) = n$.

Ainsi, $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 5.7 : Pour $n \in \mathbb{N}_0$, soit $P(n)$ la propriété : $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leqslant n \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)$ pour tout $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.

– Il est clair que $P(1)$ est vraie.

– Supposons que $P(n)$ soit vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie. Soient $a_1, \cdots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$.

Rappelons tout d'abord que si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $2ab - a^2 \leqslant b^2$ (car $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geqslant 0$).

On a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} (2a_k a_{n+1}).$$

Puisque $P(n)$ est vraie, on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) + a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n}(2a_k a_{n+1}).$$

On ajoute et on retranche na_{n+1}^2, on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) + (n+1)a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n}(2a_k a_{n+1} - a_{n+1}^2).$$

Par la remarque précédente, on déduit que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) + (n+1)a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Ainsi, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 \leqslant (n+1)\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right).$$

Ainsi, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}_0$.

Exercice 5.8 : (1) On a $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Comme les trois ensembles $A \setminus B$, $A \cap B$ et $B \setminus A$ sont deux à deux disjoints, on déduit que

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A \setminus B) + \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(B \setminus A).$$

Ainsi,

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = [\mathrm{Card}(A \setminus B) + \mathrm{Card}(A \cap B)] + [\mathrm{Card}(B \setminus A) + \mathrm{Card}(A \cap B)] - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Mais $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A \setminus B) + \mathrm{Card}(A \cap B)$ car $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. De même on a $\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(B \setminus A) + \mathrm{Card}(A \cap B)$. Par conséquent,

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

(2) Pour $n \in N_0$, soit $P(n)$ la propriété :

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i) \quad \text{pour des ensembles finis } A_1, \cdots, A_n.$$

– Il est clair que $P(1)$ est vraie.

– Supposons que $P(n)$ soit vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie. Soient $A_1, \cdots, A_{n+1}$ des ensembles finis. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= \mathrm{Card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \mathrm{Card}(A_{n+1}) - \mathrm{Card}((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}) \quad (\text{par } (1)) \\
&\leqslant \mathrm{Card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \mathrm{Card}(A_{n+1}) \\
&\leqslant \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{Card}(A_i) \quad (\text{car } P(n) \text{ est vraie}).
\end{aligned}$$

Ainsi, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Correction
(Arithmétique dans $\mathbb{Z}$)

Exercice 6.1 :

(1) Oui.

(2) Non. Par exemple, $4 \times 2 + 3 \times (-2) = 2$ mais $\text{pgcd}(4,3) = 1 \neq 2$.

(3) Oui. Supposons que $\text{pgcd}(a, b^3) \neq 1$. Alors, il existe un nombre premier p qui divise a et b^3. Par conséquent, p divise a et b, ce qui n'est pas possible car $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Ainsi, $\text{pgcd}(a, b^3) = 1$.

(4) Non. Par exemple, 2 divise $5 + 3$ et $5 - 3$, mais 2 ne divise ni 5 ni 3.

(5) Oui car un nombre premier qui divise un produit divise l'un des facteurs.

(6) Non.

(7) Oui.

(8) Non.

(9) Oui. En effet, si 5 divise b^2, alors 5 divise b car 5 est premier. Soit $c \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 5c$. Ainsi, $b^2 = 25(c^2)$ est divisible par 25.

(10) Non. Par exemple, 12 divise $6^2 = 36$ mais 4 ne divise pas 6.

(11) Oui. En effet, comme 2 et 3 divisent 12, et 12 divise b^2, alors 2 et 3 divisent b^2. Par conséquent, 2 et 3 divisent b (car 2 et 3 sont des nombres premiers). Ainsi, 6 divisent b, et par conséquent $36 = 6^2$ divise b^2.

(12) Non. Par exemple, 91 divise $91 = 13 \times 7$, mais 91 ne divise ni 13 ni 7.

Exercice 6.2 :

Comme $4125 = 3780 + 345$, on déduit que $24396465 = 6454 \times 3780 + 345$. Puisque $345 < 3780$, on déduit que 6454 est le quotient de la division Euclidienne de 24396465 par 378.

Exercice 6.5 :

Par hypothèse, $n = 5q + r$ avec $r = 2$ ou 3 et $q \in \mathbb{N}$.

– Supposons que $r = 2$. Alors, $n^2 + 1 = 25q^2 + 20q + 5 = 5(5q^2 + 4q + 1)$.

– Supposons que $r = 3$. Alors, $n^2 + 1 = 25q^2 + 30q + 10 = 5(5q^2 + 6q + 2)$.

Donc, 5 divise $n^2 + 1$.

Exercice 6.7 :

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On va discuter sur la parité de n.

– Supposons que n soit pair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors, suivant que k est pair ou impair, on a $n = 4l$ ou $n = 4l + 2$ pour un certain $l \in \mathbb{Z}$. Alors, $n^2 = 8(2l^2)$ ou $n^2 = 8(2l^2 + 2l) + 4$. Donc, 8 divise n^2 ou $n^2 - 4$.

– Supposons que n soit impair. Il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2r + 1$. Alors, suivant que r est pair ou impair, on a $n = 4s + 1$ ou $n = 4s + 3$ pour un certain $s \in \mathbb{Z}$. Alors, $n^2 - 1 = 8(2s^2 + s)$ ou $n^2 - 1 = 8(2s^2 + 3s + 1)$. Donc, 8 divise $n^2 - 1$.

Exercice 6.8 :

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. On écrit $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ et $\text{PGCD}(a, b) = 1$. On a $2b^2 = a^2$. Comme 2 est premier divisant a^2, on déduit que 2 divise a. Posons $a = 2c$ avec $c \in \mathbb{N}$. Alors, on déduit que $b^2 = 2c^2$. Comme 2 divise b^2, on déduit que 2 divise b, ce qui n'est pas possible car $\text{PGCD}(a, b) = 1$. Donc, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6.9 :

Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ tel que $n-1$ divise n^2+1. Puisque $n^2+1 = (n^2-1)+2$ et que $n-1$ divise n^2-1, on déduit que $n-1$ divise 2. Ainsi, $n-1 \in \{-2,-1,1,2\}$. Ainsi, $n \in \{-1,0,2,3\}$. Réciproquement, on vérifie que si $n \in \{-1,0,2,3\}$, alors $n-1$ divise n^2+1.

Exercice 6.10 :

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tel que p divise $(p-1)!+1$. Montrons que p est premier.
Supposons que p ne soit pas premier. Alors, il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $1 < u < p$ et u divise p. Comme p divise $(p-1)!+1$, alors u divise $(p-1)!+1$. De plus, l'hypothèse $u < p$ implique que u divise $(p-1)!$. Ainsi, u divise $((p-1)!+1)-(p-1)! = 1$, ce qui donne que $u = 1$, une contradiction car $u > 1$. Ainsi, p est premier.

Exercice 6.11 :

(1) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $1 < n \leqslant m$. Puisque $n \leqslant m$, on déduit que n divise $m!$, et par conséquent n divise $m!+n$. De plus, $1 < n < m!+n$ (car $n \leqslant m < m!+n$). Par conséquent, $m!+n$ n'est pas premier.

(2) On considère les entiers $\alpha_n := (101)!+n$ avec $1 < n \leqslant 101$. Par la question (1), les entiers $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{101}$ ne sont pas premiers. De plus, ces entiers sont consécutifs.

Exercice 6.12 : Soient $a, b \in \mathbb{Z}_0$. Posons $d = \mathrm{pgcd}(a,b)$.

(1) Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq$. Montrons que $d = |b|$. Comme b divise a et b, on déduit que b divise d (car $d = \mathrm{pgcd}(a,b)$). En particulier, $|b|$ divise d. De plus, d divise b implique que d divise $|b|$. Ainsi, $d = |b|$.

(2) Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{Z}_0$ tels que $a = bq + r$. Montrons que $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(b,r)$. Posons $d' = \mathrm{pgcd}(b,r)$.
– Comme d divise a et b, alors d divise $r = a - bq$ et b. Par conséquent, d divise d'.
– De même, d' divise b et r implique que d' divise $a = bq + r$ et b. Ainsi, d' divise d.
D'où, $d = d'$.

Exercice 6.13 : (1) En effectuant des divisions Euclidiennes successives, on obtient :

(div. 1) $\quad 1306 = 128 \times 10 + 26,$

(div. 2) $\quad 128 = 26 \times 4 + 24,$

(div. 3) $\quad 26 = 24 \times 1 + 2,$

(div. 4) $\quad 24 = 2 \times 12 + 0.$

En appliquant l'exercice 6.12 à ces divisions, on déduit que :

$$\mathrm{pgcd}(1306,128) = \mathrm{pgcd}(128,26) = \mathrm{pgcd}(26,24) = \mathrm{pgcd}(24,2) = \mathrm{pgcd}(2,0) = 2.$$

Reste à trouver deux entiers $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $1306m + 128n = 4$.

Par (div. 3), on a $2 = 26 - 24$. On utilise (div. 2) pour avoir $2 = 26 - (128 - 26 \times 4) = 26 \times 5 - 128$. Puis (div. 1) donne $2 = (1306 - 128 \times 10) \times 5 - 128$. Ainsi, $2 = 1306 \times 5 + 128 \times (-51)$. Par conséquent, $1306 \times 10 + 128 \times (-102) = 4$. On prend $m = 10$ et $n = -102$.

(2) On a $6n^2 + 4n + 9 = (3n+2) \times 2n + 9$. Ainsi, $\mathrm{pgcd}(6n^2+4n+9, 3n+2) = \mathrm{pgcd}(3n+2, 9)$. Comme 3 ne divise pas $3n+2$, et que les diviseurs positifs de 9 sont 1, 3 et 9, on déduit que 1 est le seul diviseur positif commun à $3n+2$ et 9. D'où, $\mathrm{pgcd}(3n+2, 9) = 1$.

(3) Par l'exercice 6.12, on obtient :

$$17a + 5b = (7a+2b) \times 2 + 3a + b \implies \mathrm{pgcd}(17a+5b, 7a+2b) = \mathrm{pgcd}(7a+2b, 3a+b).$$
$$7a + 2b = (3a+b) \times 2 + a \implies \mathrm{pgcd}(7a+2b, 3a+b) = \mathrm{pgcd}(3a+b, a).$$
$$3a + b = 3a + b \implies \mathrm{pgcd}(3a+b, a) = \mathrm{pgcd}(a,b).$$